

Статья поступила в редакцию: 15.08.2026

Статья принята к публикации: 20.08.2026

Статья опубликована: 28.08.2026

УДК 621.315

DOI: 10.32743/UniTech.2026.149.8.23327

Нелинейно деформационная модель оценки прочности по нормальному сечению предварительно напряженного центрально-обжатого элемента, работающего на изгиб

Мирзаев Пулат Таджиевич

канд. техн. наук, проф.

кафедра Инженерное строительство, Ташкентский архитектурно строительный университет

Республика Узбекистан, г. Ташкент

E-mail: pulatmirza@mail.ru

Шамансурова Зулайхо Пулатовна

докторант, PhD

кафедра Инженерное строительство, Ташкентский архитектурно строительный университет

Республика Узбекистан, г. Ташкент

E-mail: sh.zulayxo@mail.ru

Nonlinear deformation model for strength assessment of a prestressed centrally compressed member subjected to bending based on its normal cross-section

Mirzayev Pulat

candidate of Technical Sciences, Professor

Department of Civil Engineering, Tashkent University of Architecture and Civil Engineering

Republic of Uzbekistan, Tashkent

Shamansurova Zulaykho

PhD, Researcher

Department of Civil Engineering, Tashkent University of Architecture and Civil Engineering

Republic of Uzbekistan, Tashkent

Аннотация

Предлагается практический метод оценки прочности нормальных сечений предварительно напряженных конструкций по нелинейной деформационной модели, основанный на нормативных диаграммах деформирования материалов и способа итерационных процедур. Спецификой метода оценки прочности нормальных сечений элемента по нелинейной деформационной модели является переход от несложных зависимостей метода расчета по предельным состояниям, построенных на эмпирических

Библиографическое описание: Мирзаев П.Т., Шамансурова З.П. Нелинейно деформационная модель оценки прочности по нормальному сечению предварительно напряженного центрально-обжатого элемента, работающего на изгиб // Universum: технические науки : электрон. научн. журн. 2026. 8(149). URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/23327>

формулах, на деформационную модель расчета прочности конструкций, основанный на диаграммах деформирования бетона и арматуры. В деформационном методе расчета переменной величиной является положение нейтральной линии, связанное с жесткостью конструкции, из-за чего возникают трудности в решении нелинейных уравнений, для упрощения решений которых можно использовать численный метод последовательных приближений. Универсальность деформационной модели заключается в возможности проведения контрольных тестов, например, для верификации конструктивных расчетов в стадии проектирования. Рассматриваемый деформационный метод оценки несущей способности преднапряженных элементов допускает контроль за изменением напряженно-деформированного состояния нормального сечения от начала загрузки до момента разрушения, а также дает возможность выяснить признак потери несущей способности элемента – «по бетону или арматуре». Прикладные возможности предлагаемого метода установлены на примере оценки прочности нормального сечения предварительно напряженной стойки безопалубочного формования для опор высоковольтных линий, которая эксплуатируется как консольная балка при действии знакопеременных моментов. Цель исследования – прикладное применение нелинейной деформационной модели в практике проектирования при оценке прочности нормальных сечений предварительно напряженных изгибаемых элементов итерационными процедурами в вычислительной среде Microsoft Excel.

Abstract

A practical method for assessing the strength of normal cross-sections of prestressed structures using a nonlinear deformation model is proposed. The method is based on standard stress–strain diagrams for structural materials and iterative procedures. The specific feature of the proposed method for assessing the strength of normal cross-sections is the transition from relatively simple limit-state design relationships based on empirical formulas to a deformation-based approach for structural strength analysis using stress–strain diagrams for concrete and reinforcement.

In the deformation-based method, the variable parameter is the position of the neutral axis, which is related to the stiffness of the structure. This results in difficulties in solving nonlinear equations; therefore, a numerical method of successive approximations can be used to simplify their solution. The versatility of the deformation model lies in its ability to perform verification tests, for example, to validate structural design calculations at the design stage.

The considered deformation-based method for assessing the load-bearing capacity of prestressed members makes it possible to monitor changes in the stress–strain state of a normal cross-section from the beginning of loading to failure. It also makes it possible to identify the mode of loss of load-bearing capacity of the member, i.e., whether failure occurs due to concrete or reinforcement.

The practical applicability of the proposed method is demonstrated by assessing the strength of the normal cross-section of a prestressed pole manufactured by a formwork-free production method for high-voltage transmission line supports. The pole operates as a cantilever beam under the action of alternating bending moments.

The aim of the study is the practical application of the nonlinear deformation model in design practice for assessing the strength of normal cross-sections of prestressed bending members using iterative procedures in the Microsoft Excel computational environment.

Ключевые слова: железобетон, деформация, напряжение, модуль деформации, центр тяжести, кривизна, итерационные процедуры.

Keywords: reinforced concrete, strain, stress, deformation modulus, center of gravity, curvature, iterative procedures.

Введение

В нормативных документах [13, с. 30; 11, с. 17-19] предусматриваются два метода к расчету прочности нормального сечения обычных и предварительно напряженных железобетонных конструкций:

- по предельным усилиям;
- по нелинейно деформационной модели (НДМ).

Согласно методу предельных усилий, прочность элемента считается обеспеченной, если усилие F от внешних нагрузок и воздействий, в том числе с учетом предварительного напряжения арматуры не превышает предельного усилия F_{ult} , воспринимаемого элементом в рассматриваемом сечении. Предельным усилием для изгибаемого элемента является предельный момент M_{ult} , который приводит к потере его несущей способности. Одной из предпосылок расчета является представление о равномерном распределении напряжений в бетоне сжатой зоны, где напряжения принимаются равными расчетному сопротивлению бетона сжатию R_b . Такой принцип обеспечивает определение прочности, но не дает возможность вычислить деформации и кривизну сечения элемента. В связи с этим, расчет по деформациям для определения прогиба элемента проводится по непрактичным формулам с большим количеством эмпирических коэффициентов. Основным преимуществом метода расчета по предельным усилиям считается возможность выполнения расчетов с использованием калькулятора.

Основой метода оценки прочности элемента по НДМ является применение диаграмм деформирования бетона и стальной арматуры, устанавливающих связь между напряжениями σ и деформациями ε . Для высокопрочной проволочной арматуры используется трехлинейная диаграмма состояния арматуры с условным пределом текучести [1, с. 26]. Для бетона допустимо использовать аналитические двух-, трехлинейные диаграммы. Такие диаграммы для бетона базируются на основе параметра прочности R_b и соответствующих ему деформациях $\varepsilon_{b0} = 0,0015$. Расчеты по НДМ могут осуществляться с использованием программных комплексов, реализующих метод конечных элементов [3, с. 50–51]. Однако создание расчетных моделей является трудоемким процессом, поскольку возникает необходимость моделирования взаимодействия бетона и арматуры и использования достоверных экспериментальных данных для верификации расчетной модели [3, с. 51–53]. Вместе с тем НДМ является практичным методом, позволяющим оценивать эффективность разрабатываемых конструктивных решений [11, с. 128–130]. По сравнению с методом

предельных усилий, метод расчета по НДМ допускает контролировать нелинейное изменение напряженно-деформированного состояния сечения не только в предельном, но и в допредельном и запредельном состояниях.

В последние годы к проблеме методики оценки прочности по нормальным сечениям железобетонных конструкций по НДМ проявляется значительный интерес [14, с. 172; 2, с. 18–19; 16, с. 80; 8, с. 93–95; 9, с. 44–46; 10, с. 38–40], так как в нормативных методических документах не имеется способов ее численной реализации, что приводит проектировщиков к затруднениям при определении способа для их решения. Хотя НДМ формально рассматривается как достоверный метод расчета железобетонных элементов, но доказательная база для этого отсутствует [5, с. 128–130; 4, с. 5–7]. В работах [1, с. 51–53; 16, с. 80–83; 8, с. 26–30] отмечается, что расчет железобетонных конструкций по НДМ можно отнести к проверочным методам оценки прочности элемента, что обуславливает значимость рассматриваемой проблемы. НДМ эффективно использовать тогда, когда уже проведен расчет конструкции по предельным усилиям, а также при известных расчетных параметрах (геометрия сечения, классы бетона и арматуры, эксплуатационные нагрузки и воздействия). В дальнейшем представляется перспективным использование НДМ для единого расчета железобетонных элементов, в том числе предварительно напряженных, по различным группам предельных состояний [17, с. 13–14].

При оценке прочности на основе НДМ учитывается нелинейное деформирование бетона и арматуры, а численная реализация модели позволяет более детально оценивать напряженно-деформированное состояние и несущую способность железобетонных элементов [2, с. 144–149], создавая основу для безопасного и рационального проектирования конструкций [19, с. 211–212; 18, с. 605–614]. При этом применяется итерационный метод вычислений. Задача итерационных вычислений состоит в определении значений относительных деформаций в бетоне растянутой и сжатой зон и арматуре, при которых определяется кривизна сечения элемента [12, с. 22–24; 14, с. 164–166]. Кривизна сечения определяется с учетом изменения деформационных характеристик бетона и арматуры [14, с. 165–166; 15, с. 172–174]. При каждой итерации уточняется положение нейтральной линии. Критерием оценки прочности по НДМ является величина относительных деформаций бетона сжатой зоны и арматуры растянутой зоны, полученных расчетным путем, и сравнение их с критериальными параметрами, допускаемыми нормами.

Для численной реализации оценки прочности нормальных сечений железобетонных конструкций по НДМ применима программа Microsoft Excel с использованием VBA (язык программирования Visual Basic for Applications), прикладное использование которого описано в работе [20, с. 1–2].

Объектом расчетно-аналитического исследования является предварительно напряженная центрально-обжатая стойка для опор высоковольтных линий для напряжений 0,4 – 10 кВ, производимая по технологии стенового безопалубочного формования, и работающая как консольная балка при действии знакопеременного момента [6, с. 50–51].

Характерной особенностью предварительно напряженных центрально-обжатых элементов ($A_{sp} = A'_{sp}$), работающих на изгиб, является сниженная величина предельной прочности сечения, по сравнению с предварительно напряженными изгибаемыми элементами, у которых обычно значение A'_{sp} составляет $(0...0,2) A_{sp}$.

Анализ ориентировочных (оценочных) численных примеров расчета прочности стоек, армированных только напрягаемой проволоочной арматурой класса Вр1400, показал следующее: чем больше величина армирования сжатой зоны сечения по отношению к количеству арматуры растянутой зоны, тем меньше несущая способность стойки. На рис. 1 приведен график зависимости предельной несущей способности стойки от значения соотношения площадей сечения арматуры сжатой и растянутой зон сечения (A'_{sp}/A_{sp}). График показывает, что при высоких уровнях соотношений площади сечения арматуры сжатой зоны относительно арматуры растянутой зоны показатели прочности (несущей способности) стойки уменьшаются.

Такая закономерность расчетной оценки прочности изгибаемых элементов с высокими уровнями обжатия бетона элементов напрягаемой арматурой, показывает, что в таких случаях, есть вероятность неоправданного риска, т.е. угрозы аварийности с непредсказуемыми последствиями. Поэтому такой «негативный» фактор следует учитывать при расчете предварительно напряженных изгибаемых элементов, армированных только двойной ненапрягаемой арматурой (особенно, когда при проектировании имеется необходимость принятия решения о высоком уровне обжатия напрягаемой арматурой не только растянутой от внешней нагрузки зоны, но и сжатой зоны сечения элемента).

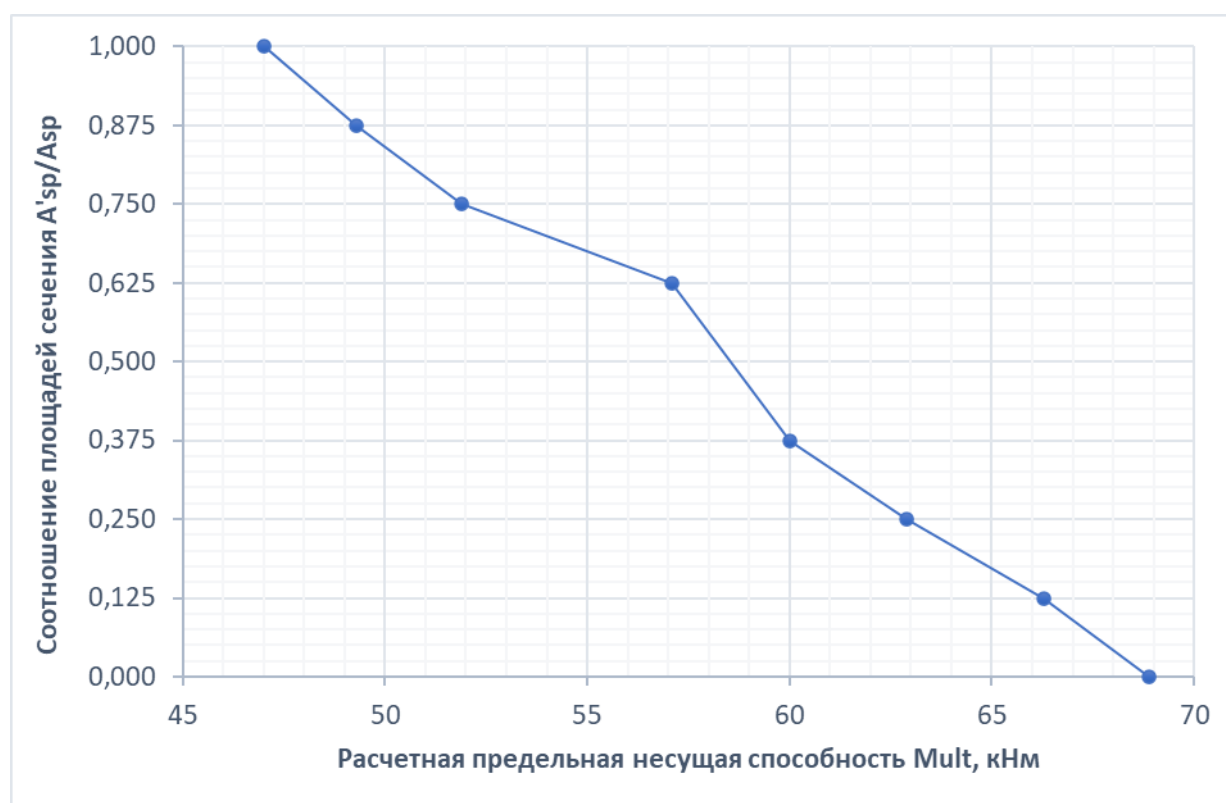


Рисунок 1. График зависимости предельной несущей способности стойки от величины армирования сжатой зоны сечения напрягаемой арматуры

График показывает, что с увеличением соотношения $\frac{A'_{sp}}{A_{sp}}$ показатели прочности M_{ult} стойки снижаются. Отношение M_{ult} (при

$A'_{sp} = A_{sp} = 3,136 \text{ см}^2$, где количество стержней в сжатой и растянутой зонах $n' = n = 16$) к M_{ult} (при $A'_{sp} = 0$; $A_{sp} = 3,136 \text{ см}^2$, где $n' = 0$; $n = 16$) составляет 0,682 – снижение прочности на 31,8%.

Учитывая такой фактор, определена зависимость изменения M_{ult} при увеличении количества арматуры для схемы симметричного армирования $A_{sp} = A'_{sp}$ (рис. 2).



Рисунок 2. График зависимости изменения M_{ult} при увеличении количества арматуры для схемы симметричного армирования $A_{sp} = A'_{sp}$

Вышеотмеченные факторы также повышают интерес к использованию НДМ для практической оценки прочности предварительно напряженных центрально-обжатых элементов, работающих на изгиб.

Цель исследования – практическое применение НДМ при оценке прочности по нормальным сечениям предварительно напряженных изгибаемых элементов в вычислительной среде Microsoft Excel.

Материалы

Поперечное сечение стоек стендового безопалубочного формования представляет собой трапецию, у которой размер верхнего основания меньше нижнего, что способствует сохранению конфигурации свежетоформованного бетона стоек при изготовлении безопалубочным формованием.

Трапецеидальное сечение стойки приводится к прямоугольному сечению, у которого ширина принимается равной меньшему значению основания трапеции ($b = 175$ мм), в связи с тем, что стойка испытывает знакопеременный момент от действия внешних нагрузок (рис. 3).

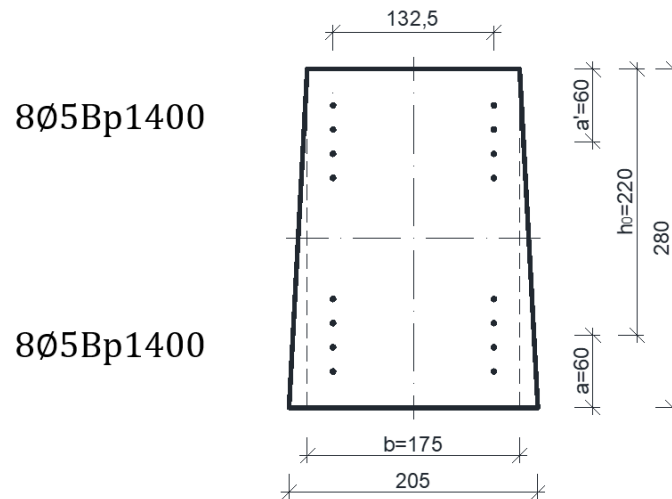


Рисунок 3. Схема армирования сечения стойки для опор ВЛ

Исходные данные

Бетон класса В40: $R_b = 22$ МПа; $R_{bt} = 1,4$ МПа; $E_b = 36000$ МПа. Арматура класса Ø5Bp1400: $R_s = 1215$ МПа; $E_s = 200000$ МПа; $A_{sp} = A'_{sp} = 1,568$ см².

$P = 345$ кН—усилие от предварительного напряжения арматуры;

$M_{sp} = 16,8$ кНм—момент от усилия обжатия;

$M_{ult} = 34,51$ кНм—прочность нормального сечения, рассчитанный по предельным усилиям ($l_0 = 7,5$ м, $F = 4,601$ кН).

$M_{ult1} = M_{ult} - M_{sp} = 17,709$ кНм—момент, воспринимаемый сечением, без момента (M_{sp}), возникающего от усилия обжатия.

$\sigma_{bp} = \sigma'_b = 5,29$ МПа—краевые напряжения в бетоне при обжатии усилием $P_{(2)}$

$$\varepsilon_{bp} = \varepsilon'_{bp} = \frac{\sigma_{bp} (\sigma'_{bp})}{E_b} = \frac{5,29}{36000} = 0,000147;$$

$\sigma_{sp} = 832$ МПа—напряжения в арматурных стержнях после всех потерь.

$$\varepsilon_{sp} = \frac{832}{200000} = 0,00416.$$

На рис. 4 показана схема напряженно-деформированного состояния после обжатия стойки предварительно напряженной арматурой (после всех потерь напряжения в арматуре).

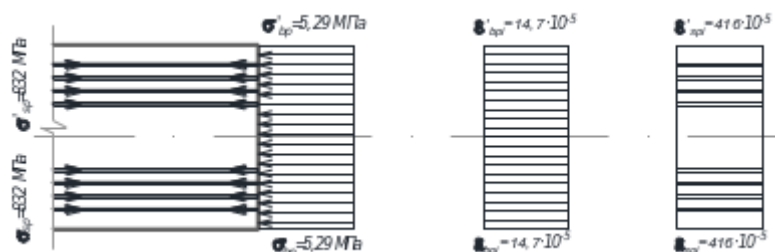


Рисунок 4. Напряженно-деформированное состояние стойки после обжатия предварительно напряженной арматурой

Методы исследования

При оценке прочности сечений по НДМ предусматривается дискретизация поперечного сечения элемента, т. е. бетонное сечение условно разбивается по высоте на малые участки (рис. 5). По такому же принципу в армировании выделяются отдельные стержни с своей площадью сечения. Напряжения в пределах малых участков принимаются усредненными (равномерно распределенными по высоте).

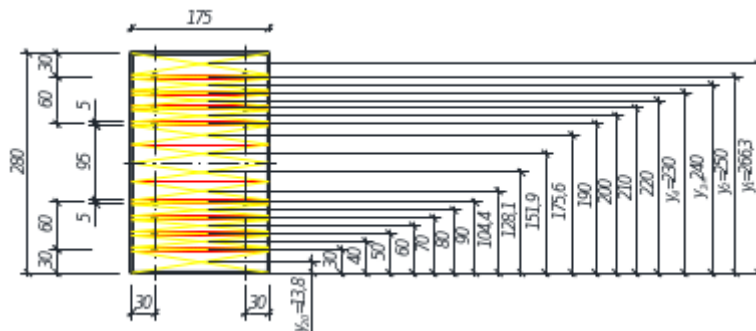


Рисунок 5. Разбивка приведенного поперечного сечения стойки

Поскольку, модуль деформаций переменный показатель, то с увеличением действия нагрузки на элемент значение модуля деформаций снижается (стремится к нулю), а деформации достигают своих предельных значений. Расчет по НДМ показывает более точные значения относительных деформаций и напряжений сжатого бетона и растянутой арматуры, и отчетливо отображает существенные изменения напряженно-деформированного состояния по высоте сечения элемента в форме эпюры нормальных напряжений. Поэтому расчетом по НДМ можно проверить достоверность результатов расчета по предельным усилиям. Исходя из этого, при расчете по НДМ следует знать предельный момент M_{ult} , размеры сечения ($b \times h$), диаметр и количество арматурных стержней, а также прочностные и деформационные показатели материалов.

Надо полагать, что при оценке прочности элемента по НДМ при первой итерации, а также изменяющийся при второй и последующих итерациях модуль деформации условно реализует функцию внешней нагрузки при испытаниях этого элемента. По сути, при каждом изменении модуля деформаций материалов, у проектируемого элемента накапливается определенная величина приращений в деформациях, т.е. у рассматриваемого изгибаемого элемента увеличиваются прогибы.

Следует подчеркнуть, что расчеты конструкций как по предельным усилиям, так и по НДМ проводятся с применением гипотезы плоских сечений.

Поперечное сечение стойки разбивается на 20 малых участков (рис. 5). Начало нумерации участков принимается с нижней растянутой зоны сечения. После разбивки определяются расстояния y_{bi} и y_{si} от нижнего растянутого волокна до центра тяжести всех малых участков бетона и арматуры.

В табл. 1 представлены следующие параметры приведенного сечения стойки для итерационных расчетов: i —порядковый номер малого участка; Δ , b_{bi} , A_{bi} —соответственно высота, ширина, площадь i -го малого участка бетона; y_{bi} —расстояние от крайнего волокна нижней растянутой зоны до центра тяжести i -го малого участка бетона;

$E'_{bi} = 0,85 E_b = 30600$ МПа – модуль деформации бетона, а коэффициент «0,85» принимается к E_b при непродолжительном действии нагрузки – при определении кривизны элемента без трещин в бетоне растянутой зоны; y_{si} – расстояние от крайнего волокна бетона нижней растянутой зоны до центра тяжести i -ой арматуры; A_{si} , E_{si} – площадь сечения и модуль упругости i -ой арматуры; y_{oj} – положение нейтральной линии при j -ой итерации.

Таблица 1.

Параметры малых участков приведенного сечения для итерационных расчетов

№ i	Δ_i	b_{bi}	A_{bi}	A_{si}	y_{bi}	y_{si}	ε_{bpi}	ε_{spi}
мал. уч.	см	см	см ²	см ²	см	см		
1	2,75	17,5	48,13		1,375		1,47E-04	
2	0,50	17,5	8,75	0,392	3,000	3,000	1,47E-04	4,16E-03
3	1,50	17,5	26,25		4,000		1,47E-04	
4	0,50	17,5	8,75	0,392	5,000	5,000	1,47E-04	4,16E-03
5	1,50	17,5	26,25		6,000		1,47E-04	
6	0,50	17,5	8,75	0,392	7,000	7,000	1,47E-04	4,16E-03
7	1,50	17,5	26,25		8,000		1,47E-04	
8	0,50	17,5	8,75	0,392	9,000	9,000	1,47E-04	4,16E-03
9	2,38	17,5	41,56		10,438		1,47E-04	
10	2,38	17,5	41,56		12,812		1,47E-04	
11	2,38	17,5	41,56		15,187		1,47E-04	
12	2,38	17,5	41,56		17,563		1,47E-04	
13	0,50	17,5	8,75	0,392	19,000	19,000	1,47E-04	4,16E-03
14	1,50	17,5	26,25		20,000		1,47E-04	
15	0,50	17,5	8,75	0,392	21,000	21,000	1,47E-04	4,16E-03
16	1,50	17,5	26,25		22,000		1,47E-04	
17	0,50	17,5	8,75	0,392	23,000	23,000	1,47E-04	4,16E-03
18	1,50	17,5	26,25		24,000		1,47E-04	
19	0,50	17,5	8,75	0,392	25,000	25,000	1,47E-04	4,16E-03
20	2,75	17,5	48,13		26,625		1,47E-04	

Для итерационных расчетов используются следующие формулы

Центр тяжести приведенного сечения

$$y_0 = \frac{S_{red}}{A_{red}} = 14,0 \text{ см (при } j = 0\text{)}.$$

Новое положение нейтральной линии определяется при выполнении следующих итерационных процедур

Приведенная площадь сечения

$$A_{red} = \sum A_{bi} + \sum A_{spi} + \sum A'_{sp}.$$

Приведенный статический момент

$$S_{red} = \sum A_{bi} \cdot y_{bi} + \sum A_{spi} \cdot y_{si} + \sum A'_{sp} \cdot y_{si}.$$

Новое положение нейтральной линии

$$y_{0j} = \frac{\sum E'_{bi} \cdot A_{bi} \cdot y_{bi} + \sum E'_{si} \cdot A_{spi} \cdot y_{si} + \sum E'_{si} \cdot A'_{sp} \cdot y_{si}}{\sum E'_{bi} \cdot A_{bi} + \sum E'_{si} \cdot A_{spi} + \sum E'_{si} \cdot A'_{sp}}. (1)$$

Кривизну элемента определяют по следующей формуле, основанной на известной формуле: $\frac{1}{r} = \frac{M}{D}$,

где:

$D = E \cdot J_{red}$ — изгибная жесткость приведенного поперечного сечения элемента.

$$\frac{1}{r_j} = \frac{M}{E \cdot J_{red}} = \frac{M_{ult1}}{\sum E'_{bi} \cdot A_{bi} \cdot (y'_{bi})^2 + \sum E'_{si} \cdot A'_{spi} \cdot (y'_{si})^2 + \sum E'_{si} \cdot A'_{spi} \cdot (y'_{si})^2}, (2)$$

где:

$y'_{bi} = y_{0j} - y_{bi}$; $y'_{si} = y_{0j} - y_{si}$ — расстояние от нейтральной линии до центра тяжести i -го малого участка бетона или арматуры.

Наибольшая (предельная) кривизна элемента обеспечивается при условии

$$\delta = \frac{\frac{1}{r_j} - \frac{1}{r_{j-1}}}{\frac{1}{r_{j-1}}} \cdot 100\% \leq 1,0\% (3)$$

Расчетные деформации малых участков:

$$\varepsilon_{bi} = \frac{1}{r_j} \cdot y'_{bi} + (-\varepsilon_{bpi}); \quad \varepsilon_{si} = \frac{1}{r_j} \cdot y'_{si} + \varepsilon_{spi}, (4)$$

где:

ε_{bpi} и ε_{spi} — начальные деформации бетона и арматуры от усилия предварительного напряжения на уровне центра i -го малого участка бетона и арматуры.

В зависимости от вычисленных деформаций малых участков определяются напряжения в бетоне и арматуре (в сжатой и растянутой зонах сечения). Напряжения и модули деформаций для класса бетона В40 растянутой и сжатой зонах определяются по диаграмме, предложенной на рис.6.

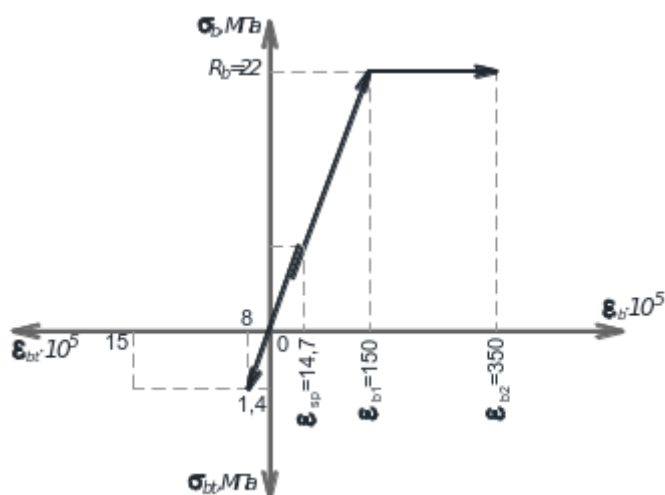


Рисунок 6. Диаграмма напряженно-деформированного состояния бетона класса В40 с учетом предварительного напряжения

При растянутом бетоне в пределах:

$$\bullet 0 < \varepsilon_{bi} < 8 \cdot 10^{-5} :$$

$$\sigma_{bi} = R_{bt} \cdot \frac{\varepsilon_{bi}}{8 \cdot 10^{-5}} (\text{МПа}); \quad E'_{bi} = \frac{R_{bt}}{8 \cdot 10^{-5}};$$

$$\bullet 8 \cdot 10^{-5} < \varepsilon_{bi} < 15 \cdot 10^{-5} :$$

$$\sigma_{bi} = R_{bt} = 1,4 \text{ МПа}; \quad E'_{bi} = \frac{1,4}{\varepsilon_{bi}} \text{ МПа}.$$

При сжатом бетоне в пределах:

$$\bullet 0 < \varepsilon_{bi} < 150 \cdot 10^{-5} :$$

$$\sigma_{bi} = R_b \cdot \frac{\varepsilon_{bi}}{150 \cdot 10^{-5}} (\text{МПа}); \quad E'_{bi} = \frac{R_b}{150 \cdot 10^{-5}} = 14666,7 \text{ МПа};$$

$$\bullet 150 \cdot 10^{-5} < \varepsilon_{bi} < 350 \cdot 10^{-5} :$$

$$\sigma_{bi} = R_b = 22 \text{ МПа}; \quad E'_{bi} = \frac{R_b}{\varepsilon_{bi}} = \frac{22}{\varepsilon_{bi}} (\text{МПа}).$$

Напряжения и модули деформаций арматуры класса Вр1400 в растянутой и сжатой зонах сечения элемента устанавливается по диаграмме, приведенной на рис. 7. При растяжении арматуры в упругой стадии работы с учетом ее предварительного напряжения, когда деформации устанавливаются в пределах величин: $0 < \varepsilon_{si} < 5,47 \cdot 10^{-3}$, σ_{si} и E'_{si} следующие :

$$\sigma_{si} = 1094 \frac{\varepsilon_{si}}{5,47 \cdot 10^{-3}} (\text{Мпа}); \quad E'_{si} = E_s.$$

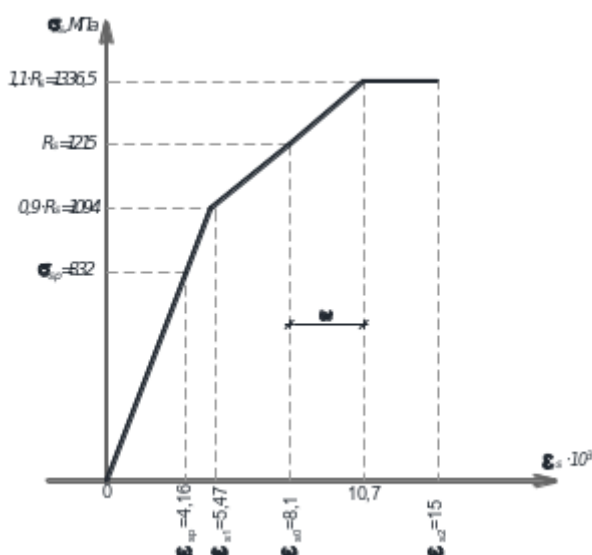


Рисунок 7. Диаграмма напряженно-деформированного состояния арматуры класса Вр1400 с учетом предварительного напряжения

Если деформации оказываются в пределах $5,47 \cdot 10^{-3} < \varepsilon_{si} < 10,7 \cdot 10^{-3}$, то напряжения $\sigma_{si} = 46367 \cdot \varepsilon_{si} + 840,37$ определяется из следующего равенства (см. рис. 7)

$$\frac{\sigma_{si} - 1094}{\varepsilon_{si} - 0,00547} = \frac{1336,5 - 1094}{0,0107 - 0,00547};$$

$$E'_{si} = \frac{\sigma_{si}}{\varepsilon_{si}}.$$

Наибольшая величина деформаций арматуры при напряжениях близких к критериальной величине $1,1R = 1336,5$ Мпа (см. рис. 7) устанавливается из следующего равенства

$$\varepsilon_{1,1R_s} = 8,1 \cdot 10^{-3} + \omega = 8,1 \cdot 10^{-3} + 2,62 \cdot 10^{-3} = 10,72 \cdot 10^{-3},$$

где:

$$\omega = \frac{(10,7 - 5,47) \cdot 10^{-3}}{(1336,5 - 1094)} \cdot (1336,5 - 1215) = 2,62 \cdot 10^{-3}.$$

При значениях расчетных деформаций, оказавшихся в пределах $10,72 \cdot 10^{-3} < \varepsilon_{si} < 15,0 \cdot 10^{-3}$, напряжения и модуль деформаций определяются из равенств: $\sigma_{si} = 1,1 R_s = 1336,5$ МПа;

$$E'_{si} = \frac{1,1 R_s}{\varepsilon_{si}} = \frac{1336,5}{\varepsilon_{si}} \text{ МПа.}$$

Следует отметить, что для проволочной арматуры, расположенной в сжатой зоне сечения A'_{spi} связь между деформациями ε_{si} и напряжениями σ_{si} при нагружении стойки следующая:

$$\varepsilon_{si} = \frac{\sigma_{spi}}{E_s},$$

где:

σ_{spi} –предварительное напряжение в арматуре с учетом всех потерь напряжений. При расположении проволочной арматуры в растянутой зоне сечения (A_{spi}):

$$\varepsilon_{si} + \frac{\sigma_{spi}}{E_s}.$$

Проверяется условие прочности по деформациям $\varepsilon_{bi} \leq [\varepsilon_{b2}]$,

$$\varepsilon_{si} < [\varepsilon_{s2}] \quad (4),$$

где:

$[\varepsilon_{b2}] = 350 \cdot 10^{-5}$; $\varepsilon_{si} = 15 \cdot 10^{-3}$ –предельные нормируемые значения для бетона и арматуры – см. рис. 4 и 5.

Условие прочности по усилиям, воспринимаемым малыми участками сечения балки, устанавливается по следующей формуле, с использованием соответствующих значений параметров, полученных при итерации, где наибольшая кривизна элемента обеспечивается при условии (3)

$$M_{ult} = \sum \sigma_{bi} \cdot A_{bi} \cdot y'_{bi} + \sum \sigma_{si} \cdot A_{si} \cdot y'_{si}. \quad (5)$$

Первая итерация проводится при соблюдении условия упругой работы бетона и арматуры в нормальном сечении балки. По формуле (1) определяется новое положение нейтральной линии, хотя фактически при первой итерации центр тяжести всего сечения (положение нейтральной линии) не меняется, т.е. $y_{01} = y_0 = 14$ см (табл.2). При известном значении нейтральной линии определяются расстояния от нейтральной линии до центра тяжести всех малых участков бетона и арматуры (y'_{bi} и y'_{si}). По формуле (2) определяется кривизна балки $(\frac{1}{r_1})$. В конце итерации по формуле (4) вычитаются деформации малых участков (ε_{bi} и ε_{si}) с учетом начальных деформаций бетона и арматуры от усилия

предварительного напряжения, а затем напряжения малых участков. Вычисленные деформации и напряжения малых участков бетона и арматуры сечения стойки при 1-ой итерации представлены в табл. 2.

Таблица 2.

Первая итерация (j =1)

i	E'_{bi}	E'_{si}	y_{0j}	y'_{bi}	y'_{si}	$1/r_j$	ε_{bi}	σ_{bi}	ε_{si}	σ_{si}	M'_{calc}
	Мпа	Мпа	см	см	см	см		Мпа		Мпа	кН·м
1	30600		14,0	12,6		1,74E-05	7,27E-05	1,3			9,040
2	30600	200000		11,0	11,0		4,44E-05	0,8	0,00435	870	
3	30600			10,0			2,70E-05	0,5			
4	30600	200000		9,0	9,0		9,61E-06	0,2	0,00432	863	
5	30600			8,0			-7,79E-06	-0,1			
6	30600	200000		7,0	7,0		-2,52E-05	-0,4	0,00428	856	
7	30600			6,0			-4,26E-05	-0,6			
8	30600	200000		5,0	5,0		-6,00E-05	-0,9	0,00425	849	
9	30600			3,6			-8,50E-05	-1,2			
10	30600			1,2			-1,26E-04	-1,9			
11	30600			-1,2			-1,68E-04	-2,5			
12	30600			-3,6			-2,09E-04	-3,1			
13	30600	200000		-5,0	-5,0		-2,34E-04	-3,4	0,00407	815	
14	30600			-6,0			-2,51E-04	-3,7			
15	30600	200000		-7,0	-7,0		-2,69E-04	-3,9	0,00404	808	
16	30600			-8,0			-2,86E-04	-4,2			
17	30600	200000		-9,0	-9,0		-3,04E-04	-4,5	0,00400	801	
18	30600			-10,0			-3,21E-04	-4,7			
19	30600	200000		-11,0	-11,0		-3,38E-04	-5,0	0,00397	794	
20	30600			-12,6			-3,67E-04	-5,4			

В начале второй итерации (и всех последующих) определяются модули деформаций в зависимости от вычисленных величин деформаций малых участков при 1-ой итерации, которые используются для определения нового положения нейтральной линии (y_{0j}).

Результаты и обсуждение

Важно отметить, что во 2-ой итерации (табл. 3) положение нейтральной линии относительно высоты сечения снижается, т.е. значение y_{0j} — уменьшается. Хотя при имитации нагружения стойки y_{0j} должно увеличиться. Это происходит из-за того, что в 1-ой итерации деформации от нагружения стойки накладываются на деформации от предварительного напряжения, что приводит к снижению значения y_{02} при 2-ой итерации.

а)



б)

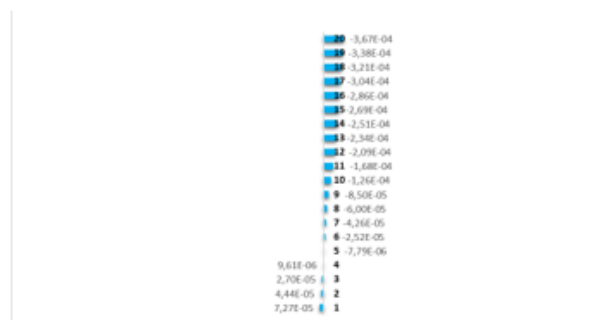


Рисунок 8. Эпюры деформаций бетона при 1-ой итерации: а) эпюра деформации от имитации нагружения стойки (ε_{bi}); б) эпюра деформации $\varepsilon_{bi} + \varepsilon_{bpi}$ (при наложении на эпюру деформаций (ε_{bi}) эпюры от обжатия бетона напрягаемой арматурой (ε_{bpi}) — см. рис. 4)

Таблица 3.

Вторая итерация (j =2)

i	E'_{bi}	E'_{si}	y_{0j}	y'_{bi}	y'_{si}	$1/r_j$	ε_{bi}	σ_{bi}	ε_{si}	σ_{si}	M'_{calc}
	Мпа	Мпа	см	см	см	см		Мпа		Мпа	кН·м
1	17500		13,6	12,3		3,26E-05	2,52E-04	0,0	0,00451		12,6
2	17500	200000		10,6	10,6		2,00E-04	0,0		901	
3	17500			9,6			1,67E-04	0,0	0,00444		
4	17500	200000		8,6	8,6		1,34E-04	0,0		888	
5	14667			7,6			1,02E-04	0,0	0,00438		
6	14667	200000		6,6	6,6		6,92E-05	1,2		875	
7	14667			5,6			3,66E-05	0,6	0,00431		
8	14667	200000		4,6	4,6		3,99E-06	0,1		862	
9	14667			3,2			-4,29E-05	-0,6			
10	14667			0,8			-1,20E-04	-1,8			
11	14667			-1,6			-1,98E-04	-2,9			
12	14667			-3,9			-2,75E-04	-4,0	0,00399		
13	14667	200000		-5,4	-5,4		-3,22E-04	-4,7		797	
14	14667			-6,4			-3,54E-04	-5,2	0,00392		
15	14667	200000		-7,4	-7,4		-3,87E-04	-5,7		784	
16	14667			-8,4			-4,20E-04	-6,2	0,00385		
17	14667	200000		-9,4	-9,4		-4,52E-04	-6,6		771	
18	14667			-10,4			-4,85E-04	-7,1	0,00379		
19	14667	200000		-11,4	-11,4		-5,17E-04	-7,6		758	
20	14667			-13,0			-5,70E-04	-8,4	0,00451		

В табл. 4 приведены расчетные значения деформационных характеристик сечения при 9-ой итерации. Здесь кривизна $\frac{1}{r_9} = 21,265 \cdot 10^{-5}$ см удовлетворяет (ε_{bi} и ε_{si}), которые соответствуют условию прочности по деформациям (3). Значит итерация можно считать последней.

Таблица 4.

Девятая итерация (j =9)

i	E'_{bi}	E'_{si}	y_{oj}	y'_{bi}	y'_{si}	$1/r_j$	ε_{bi}	σ_{bi}	ε_{si}	σ_{si}	M'_{calc}
	Мпа	Мпа	см	см	см	см		Мпа		Мпа	
1	0		22,21	20,8		0,000213	4,28E-03	0,0			35,1
2	0	148732		19,2	19,2		3,94E-03	0,0	0,00824	1223	
3	0			18,2			3,72E-03	0,0			
4	0	154283		17,2	17,2		3,51E-03	0,0	0,00782	1203	
5	0			16,2			3,30E-03	0,0			
6	0	160470		15,2	15,2		3,09E-03	0,0	0,00739	1183	
7	0			14,2			2,87E-03	0,0			
8	0	167410		13,2	13,2		2,66E-03	0,0	0,00697	1163	
9	0			11,8			2,36E-03	0,0			
10	0			9,4			1,85E-03	0,0			
11	0			7,0			1,35E-03	0,0			
12	0			4,6			8,40E-04	0,0			
13	0	200000		3,2	3,2		5,35E-04	0,0	0,00484	968	
14	0			2,2			3,22E-04	0,0			
15	13695	200000		1,2	1,2		1,09E-04	1,4	0,00442	883	
16	14667			0,2			-1,03E-04	-1,5			
17	14667	200000		-0,8	-0,8		-3,16E-04	-4,6	0,00399	798	
18	14667			-1,8			-5,29E-04	-7,8			
19	14667	200000		-2,8	-2,8		-7,41E-04	-10,9	0,00357	713	
20	14667			-4,4			-1,09E-03	-15,9			

Изменение напряженно-деформированного состояния сечения при имитации 1-го этапа нагружения до момента разрушения отражается эпюрами деформаций и напряжений полученных при 1-ой и 9-ой итерациях, приведенных на рис. 9.

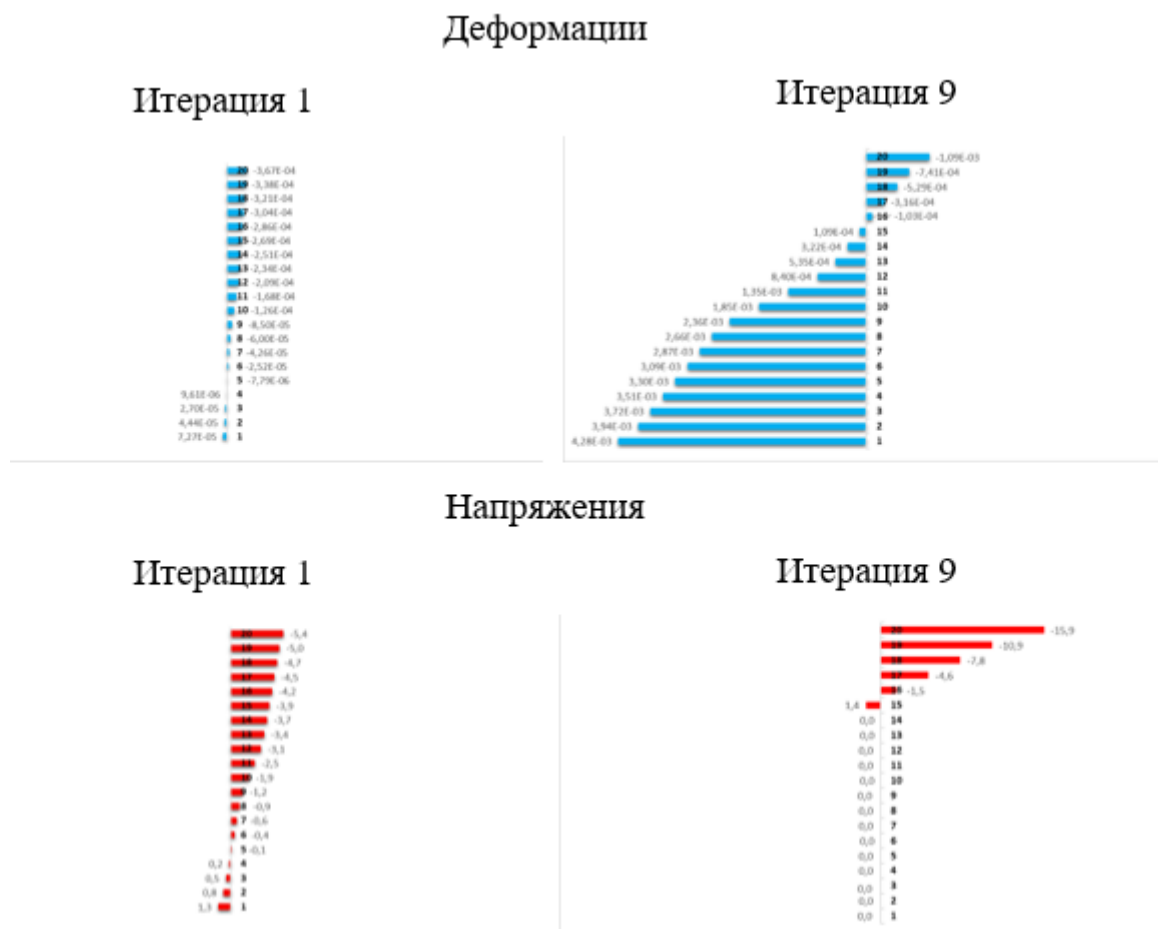


Рисунок 9. Эпюры деформаций и напряжений в бетоне по высоте сечения

Определяется прочность сечения (M_{ult}) по формуле (5), используя соответствующие параметры, вычисленные в 9-ой итерации (см. табл.4).

Таким образом, если прочность сечения по методу предельных усилий $M_{ult} = 34,51$ кНм, то прочность сечения, вычисленная по НДМ, равна 35,1кНм.

Опытные испытания двух стоек рассматриваемой конструкции, показали прочность, в среднем, $M_{test} = 40,6$ кНм (разрушение по бетону сжатой зоны).

Заключение

1. Прочность нормального сечения стойки по результатам расчета по НДМ согласуется с соответствующей величиной прочности, вычисленных по предельным состояниям, а также с результатами опытных испытаний стоек, что свидетельствует о достоверности рассмотренной инженерной методики расчета железобетонных предварительно напряженных элементов по НДМ на основе итерационных процедур.

2. Представляется, что использование итерационных процедур можно считать простым и эффективным средством в практической реализации, что может оказать существенную помощь проектировщикам, специализация которых связана с железобетонными конструкциями.

3. Предлагаемый деформационный метод оценки прочности предварительно напряженных конструкций на основе итерационных процедур, дает возможность:

- анализировать изменения, происходящие в элементе в процессе возрастания нагрузки, и следить за изменением напряженно-деформированного состояния нормального сечения от начала загрузки до момента разрушения;
- учитывать предыдущие нагружения и накопления повреждений (деформаций), что дает более точную оценку работы конструкции;
- автоматизации расчетов для удобства и простоты вычислений – даже с использованием простейших программ (например, MS Excel).

Список литературы

1. Арленинов П.Д., Крылов С.Б. Современное состояние нелинейных расчетов железобетонных конструкций // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. – 2017. – № 3.
2. Ерышев В.А. Численные методы расчеты прочности железобетонных элементов по нелинейной деформационной модели с использованием диаграмм деформирования материалов // Вестник НГИЭИ. – 2018. – № 6. – С. 17–26.
3. Коянкин А.А. О расчёте железобетонных изгибаемых элементов на основе нелинейной деформационной модели // Academia. Архитектура и строительство. – 2025. – № 1. – С. 152–159. – DOI: 10.22337/2077-9038-2025-1-152-159.
4. Краковский М.Б., Тихонов И.И. Особенности расчетов нормальных сечений железобетонных конструкций по СП 63.13330.2018 // Бетон и железобетон. – 2023. – № 4. – С. 5–11. – DOI: 10.37538/0005-9889-2023-4(618)-5-11.
5. Крылов С.Б., Арленинов П.Д. Достоинства и недостатки нелинейной деформационной модели при расчёте прочности железобетонных конструкций // Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета (Известия КГАСУ). – 2025. – № 2. – С. 124–132. – DOI: 10.48612/NewsKSUAE/72.11.
6. Мирзаев П.Т., Шамансурова З.П. Инженерная методика оценки прочности и трещиностойкости опорных стоек высоковольтной линии без поперечной арматуры при изгибе с кручением // Universum: технические науки: электрон. научн. журн. – 2025. – № 5. URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/20169>.
7. Морозов В.И., Опбул Э.К. Расчет изгибаемых сталефиброжелезобетонных элементов по нелинейной деформационной модели с использованием опытных диаграмм деформирования сталефибробетона // Вестник Тувинского государственного университета. Технические и физико-математические науки. – 2022. – № 2. – С. 35–44.

8. Опбул Э.К., Дмитриев Д.А. Расчет прочности предварительно напряженных конструкций на основе нелинейной деформационной модели на примере многопустотной плиты перекрытия безопалубочной технологии // Строительство и реконструкция. – 2018. – № 6. – С. 26–36.
9. Опбул Э.К., Ондар Э.Э. Калар-оол А.-Х.Б. Деформационные модели расчета прочности изгибаемых железобетонных элементов // Вестник Тувинского государственного университета. Технические и физико-математические науки. – 2019. – № 2. – С. 44–50.
10. Опбул Э.К. Калар-оол А.-Х.Б., Ле Куанг Хюн. Деформационная модель прочности изгибаемого элемента в среде MATLAB // Вестник Тувинского государственного университета. Технические и физико-математические науки. – 2021. – № 1. – С. 38–46.
11. Свод правил СП 52–102 Предварительно напряжённые железобетонные конструкции. – Москва: ФГУП ЦПП, 2004. – 43 с.
12. Симбиркин В.Н., Матковский В.В. К расчету напряженно-деформированного состояния и прочности элементов железобетонных конструкций по нормальным сечениям // Строительная механика и расчет сооружений. – 2010. – № 4. – С. 20–26.
13. СП 63.13330.2018. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. СНиП 52-01-2003 (с Изменениями № 1, 2): утв. Приказом Минстроя России от 19.12.2018 № 832/пр: введ. 20.06.2019.
14. Тошин Д.С. Прикладные возможности деформационной модели железобетона // Молодой ученый. – 2016. – № 29. – С. 164–166.
15. Тошин Д.С. О дискретизации нормального сечения железобетонного элемента с неоднородными свойствами бетона при расчете по нелинейной деформационной модели // Молодой ученый. – 2016. – № 27. – С. 172–174.
16. Федоров В.С., Шавыкина М.В., Юсупова Е.В. Прогибы железобетонных конструкций в предельном состоянии // Строительство и реконструкция. – 2017. – № 4. – С. 80–85.
17. Шевченко А.В., Давидюк А.А., Баглаев Н.Н. Метод итераций для расчета железобетонных элементов на основе нелинейной деформационной модели // Инженерно-строительный журнал. – 2019. – № 8. – С. 28–41.
18. Engen M., Hendriks M.A. N., Øverli J.A., Åldstedt E. Non-linear finite element analyses applicable for the design of large reinforced concrete structures. European Journal of Environmental and Civil Engineering. 2019. Vol. 23, No. 11. P. 1381–1403. DOI: 10.1080/19648189.2017.1348993.
19. Kozlov A.V., et al. Research of the Stress Condition of the Normal Section of Reinforced Concrete Elements using Nonlinear Deformation Model. Procedia Engineering. 2016. Vol. 153. P. 144–150. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.08.094.
20. Pangaribuan G. An Introduction to Excel for Civil Engineers. – 2016. – 387 P.

References

1. Arleninov P.D., Krylov S.B. [Current State of Nonlinear Calculations of Reinforced Concrete Structures] // Seismic Resistant Construction. Safety of Structures. – 2017. – № 3. – P. 50–53. (In Russ.)
2. Eryshev V.A. [Numerical methods for calculating the strength of reinforced concrete elements using a nonlinear deformation model with material stress-strain diagrams] // Vestnik NGIEI. – 2018. – № 6. – P. 17–26. (In Russ.)
3. Koyankin A.A. [On the calculation of reinforced concrete bending elements based on a nonlinear deformation model] // Academia. Arkhitektura i stroitel'stvo. – 2025. – № 1. – P. 152–159. – DOI: 10.22337/2077-9038-2025-1-152-159. (In Russ.)
4. Krakovskii M.B., Tikhonov I.I. [Features of calculating normal sections of reinforced concrete structures according to SP 63.13330.2018] // Beton i zhelezobeton. – 2023. – № 4. – P. 5–11. – DOI: 10.37538/0005-9889-2023-4(618)-5-11. (In Russ.)
5. Krylov S.B., Arleninov P.D. [Advantages and disadvantages of the nonlinear deformation model in calculating the strength of reinforced concrete structures] // Izvestiya Kazanskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta (Izvestiya KGASU). – 2025. – № 2. – P. 124–132. – DOI: 10.48612/NewsKSUAE/72.11. (In Russ.)
6. Mirzaev P.T., Shamansurova Z.P. [Engineering methodology for assessing the strength and crack resistance of high-voltage line support poles without transverse reinforcement under bending with torsion] // Universum: tekhnicheskie nauki: elektron. nauchn. zhurn. – 2025. – № 5. – URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/20169> (дата обращения: 13.08.2026). (In Russ.)
7. Morozov V.I., Opbul E.K. [Analysis of bending steel-fiber-reinforced concrete elements using a nonlinear deformation model with experimental stress-strain diagrams of steel-fiber-reinforced concrete] // Vestnik Tuvinskogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie i fiziko-matematicheskie nauki. – 2022. – № 2. – P. 35–44. (In Russ.)
8. Opbul E.K., Dmitriev D.A. [Strength analysis of prestressed structures based on a nonlinear deformation model using the example of a hollow-core floor slab manufactured by formwork-free technology] // Stroitel'stvo i rekonstruktsiya. – 2018. – № 6. – P. 26–36. (In Russ.)
9. Opbul E.K., Ondar E.E., Kalar-ool A.-Kh.B. [Deformation models for strength analysis of bending reinforced concrete elements] // Vestnik Tuvinskogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie i fiziko-matematicheskie nauki. – 2019. – № 2. – P. 44–50. (In Russ.)
10. Opbul E.K., Kalar-ool A.-Kh.B., Le Kuang Khyun. [Deformation model of the strength of a bending element in the MATLAB environment] // Vestnik Tuvinskogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie i fiziko-matematicheskie nauki. – 2021. – № 1. – P. 38–46. (In Russ.)
11. SP 52–102 [Prestressed concrete structures]. – 2004. (In Russ.)
12. Simbirkin V.N., Matkovskii V.V. [Analysis of the stress-strain state and strength of reinforced concrete structural elements in normal sections] // Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenii. – 2010. – № 4. – P. 20–26. (In Russ.)

13. [Concrete and reinforced concrete structures. Basic provisions]. (In Russ.)
14. Toshin D.S. [Applied capabilities of the deformation model of reinforced concrete] // Molodoi uchenyi. – 2016. – № 29. – P. 164–166. (In Russ.)
15. Toshin D.S. [On the discretization of the normal section of a reinforced concrete element with inhomogeneous concrete properties when calculating using a nonlinear deformation model] // Molodoi uchenyi. – 2016. – № 27. – P. 172–174. (In Russ.)
16. Fedorov V.S., Shavykina M.V., Iusupova E.V. [Deflections of reinforced concrete structures in the ultimate limit state] // Stroitel'stvo i rekonstruktsiya. – 2017. – № 4. – P. 80–85. (In Russ.)
17. Shevchenko A.V., Davidyuk A.A., Baglaev N.N. [Iteration method for calculating reinforced concrete elements based on a nonlinear deformation model] // Inzhenerno-stroitel'nyi zhurnal. – 2019. – № 8. – P. 28–41. (In Russ.)
18. Engen M., Hendriks M.A.N., Øverli J.A., Åldstedt E. Non-linear finite element analyses applicable for the design of large reinforced concrete structures. European Journal of Environmental and Civil Engineering. 2019. Vol. 23, No. 11. P. 1381–1403. DOI: 10.1080/19648189.2017.1348993.
19. Kozlov A.V., et al. Research of the Stress Condition of the Normal Section of Reinforced Concrete Elements using Nonlinear Deformation Model. Procedia Engineering. 2016. Vol. 153. P. 144–150. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.08.094.
20. Pangaribuan G. An Introduction to Excel for Civil Engineers: From Engineering Theory to Excel Practice. – CreateSpace Independent Publishing Platform. – 2016. – 386 P.